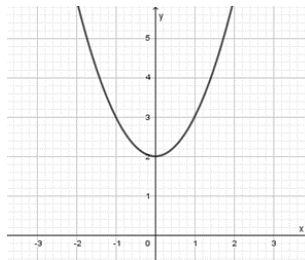
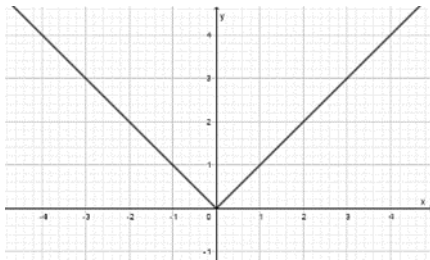


3 Stetigkeit von Funktionen

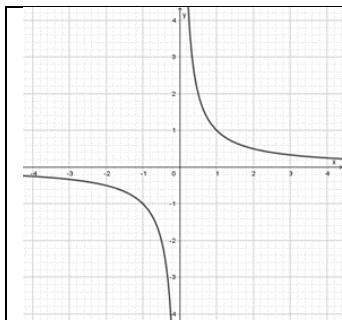
Sehr vereinfacht führen wir unter Stetigkeit folgende „Definition“ ein:

Kann man mit einem Bleistift den Graphen einer Funktion nachzeichnen ohne den Stift absetzen zu müssen, so nennt man die Funktion stetig.

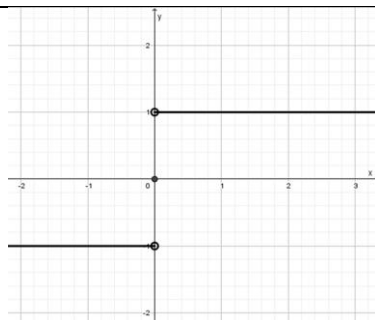
Beispiele für stetige Funktionen:



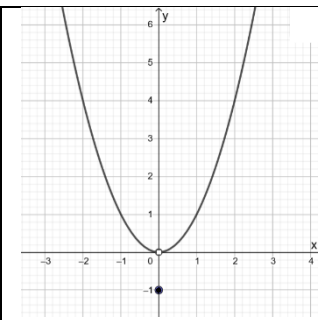
Beispiele für unstetige Funktionen



$f(x) = \frac{1}{x}$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig, da die Funktion an dieser Stelle keinen y-Wert hat.

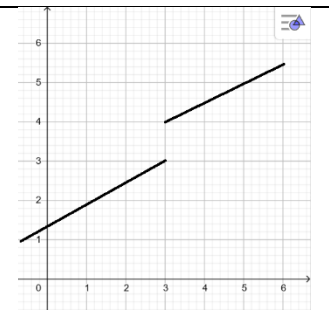


Die Funktion $f(x) = \text{sign } x$ ist nicht stetig, da der linksseitige Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$ bei -1 liegt und der rechtsseitige Grenzwert bei +1 liegt. Da es zwei unterschiedliche Grenzwerte sind, sagt man, dass es keinen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$ gibt.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \neq 0 \\ -1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Hier gibt es an der Stelle $x_0 = 0$ einen Grenzwert. Dieser stimmt aber nicht mit dem Funktionswert überein.



Diese Funktion hat eine Sprungstelle. Auch hier stimmt der rechtsseitige Grenzwert nicht mit dem linksseitigen überein.

Natürlich reicht die Bleistiftdefinition nicht aus, um Stetigkeit mathematisch zu erfassen.

Eine mathematische exakte Stetigkeitsdefinition erfordert die Verwendung von Grenzwerten.

f heißt *stetig an der Stelle* x_0 , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $f(x_0)$ existiert
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Beispiel für den Nachweis einer stetigen Funktion:

Beh: Die Funktion $y = 2x + 3$ ist stetig an der Stelle $x = 1$.

Bew:

1.) $f(1) = 5 \Rightarrow$ Der Wert $f(1)$ existiert.

2.) $\lim_{x \rightarrow 1(+)} (2x + 3) = 5$ und $\lim_{x \rightarrow 1(-)} (2x + 3) = 5 \Rightarrow$ Daher existiert der Grenzwert an der Stelle $x = 1$

3.) Es gilt: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow 5 = 5 \Rightarrow$ Der Grenzwert ist gleich dem Funktionswert.

$\Rightarrow$ Funktion ist stetig an der Stelle $x = 1$

Aufgabe: Überlege dir gemeinsam mit deinem Nachbarn eine stetige und eine unstetige Funktion und weise jeweils die Eigenschaft an einer bestimmten Stelle nach.
